Geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes

Antoine Beljean

5. Juni 2012

1 Voraussetzungen

Definition 1. *Sei X eine Menge, und $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, so dass : jeder A_i ist in X enthalten (als Menge), und $X = \cup_{i\in I} A_i$. Die schwache Topologie auf X bezüglich der A_i's ist die Topologie $\mathcal{T}$, so dass :*

$$B \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall\ i \in I : B \cap A_i \textit{ ist in } A_i \textit{ offen}$$

ÜA : Prüft, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist.

Bemerkung 2. *Man kann solch eine Topologie defienieren, selbt wenn $X \subset \cup_{i\in I} A_i$ aber $X \neq \cup_{i\in I} A_i$. Aber wir interessieren uns hier für den Fall $X = \cup_{i\in I} A_i$.*

Bemerkung 3. *Sei X ein Topologischer Raum. Wir nennen $\mathcal{T}_0$ seine Topologie. Seien $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Unterräumen von X. Die schwache Topologie $\mathcal{T}$ bzg. den A_i's auf X ist im Allgemeinen nicht die "originale" Topologie $\mathcal{T}_0$.*

Gegenbeispiel 4. *Sei $X := \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{T}_0$ der üblichen Topologie , und seien $\{A_i\}_{i\in I} := \{\{x\}\}_{x\in X}$ (wobei jeder x ist mit der von $\mathcal{T}_0$ induzierter Topologie betrachtet(das heisst ?).*

ÜA : prüft, dass die schwache Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ bzg. den $\{\{x\}\}_{x\in X}$ die diskrete Topologie ist, im Besonderen : $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_0$.

Definition 5. *Sei X topologischer Raum, $\mathcal{T}_0$ seine Topologie, und $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilräumen von X. Man sagt, dass $\mathcal{T}_0$ koherent bzg. der $\{A_i\}_{i\in I}$ ist, wenn : die originale Topologie $\mathcal{T}_0$ die schwache Topologie bzg. der $\{A_i\}_{i\in I}$ ist.*

Bemerkung 6. *Im ehemaligen Fall ist die übliche Topologie von $\mathbb{R}^n$ nicht koherent bzg. der $\{\{x\}\}_{x\in X}$.*

Beispiele 7.

- *Sei $(X, \mathcal{T}_0)$ ein topologischer Raum, und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilräumen so, dass $X = \cup_{i \in I} A_i$: dann ist die Topologie $\mathcal{T}_0$ koherent mit den $\{U_i\}_{i \in I}$. Beweis : ÜA.*
- *Sei $(X, \mathcal{T}_0)$ ein topologischer Raum, und $\{A_i\}_{i \in I}$ eine endliche Familie von abgeschlossenen Teilräumen so, dass $X = \cup_{i \in I} A_i$: dann ist die Topologie $\mathcal{T}_0$ koherent mit den $\{A_i\}_{i_inI}$. Beweis : ÜA.*
- *Sei $(X, \mathcal{T}_0)$ ein topologischer Raum, und $\{A_i\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Familie von abgeschlossenen Teilräumen so, dass $X = \cup_{i \in I} A_i$: dann ist die Topologie $\mathcal{T}_0$ koherent mit den $\{A_i\}_{i \in I}$. Beweis : ÜA.(Hinweis : im Allgemeinen, für X topologischen Raum und $\{B_j\}_{j \in I}$ Teilräume, man hat nur : $\cup_{j \in I} \overline{B}_j \subset \overline{\cup_{j \in J} B_j}$. Und falls $\{B_j\}_{j \in I}$ lokal endlich ist ?).*

Bemerkung 8. ***Vorsicht !*** *:*
Sei X eine Menge, und $(A_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, so dass : für jeden i in I, $A_i \subset X$. Man kann sowieso immer die schwache Topologie $\mathcal{T}$ auf X bzg. der A_i's defienieren. ***Aber im Allgemeinen induziert $\mathcal{T}$ auf jedem A_i nicht die originale Topologie $\mathcal{T}_i$!***

Gegenbeispiel 9. *$X := \mathbb{R}^2$, $A = \{(1, \frac{1}{n})\}_{n \geq 1} \cup \{(0,0)\}$, und $U := \mathbb{R}^2$. U und X sind mit der üblichen Topologie versehen, und A mit der diskreten Topologie (ÜA).*

Proposition 10. *Sei X eine Menge, und $\{(A_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ eine Familie von Topologischen Räumen so, dass : Jeder A_i ist in X enthalten (also als Menge, X hat noch keine Topologie) und $X = \cup_{i \in I} A_i$. Falls für alle i un j in I die folgenden Bedingungen erfühlt sind :*

- *$A_i \cap A_j$ ist in $(A_i, \mathcal{T}_i)$ abgeschlossen und auch in $(A_j, \mathcal{T}_j)$*
- *die auf $A_i \cap A_j$ von $(A_i, \mathcal{T}_i)$ induzierte Topologie ist gleich der auf $A_i \cap A_j$ von $(A_j, \mathcal{T}_j)$ induzierte Topologie*

dann ist die schwache Topologie $\mathcal{T}$ auf X bzg. den $\{(A_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ koherent mit den $\{(A_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$. Das heisst : für jeden i in I, die von $\mathcal{T}$ induzierte Topologie auf A_i ist gleich $\mathcal{T}_i$, der originalen Topologie.

Bemerkung 11. *Die gleiche Proposition mit "offen" statt "abgeschlossen" im ersten Punkt gilt auch.*

Beweis : ÜA.

2 Geometrische Realisierung

Sei n in $\mathbb{N}$ fixiert. Wir arbeiten jetzt in $\mathbb{R}^n$.

Definition 12. *Sei $m \leq n$ und sei $V := \{v_0, v_1, ..., v_m\}$ $m+1$ geometrisch unabhängige Punkte in $\mathbb{R}^n$. Die konvexe Hülle S dieser Punkte $S := Konv(V)$ ist ein (m-dimensionaler) Simplex in $\mathbb{R}^n$. Die Punkte $\{v_0, v_1, ..., v_m\}$ sind die Ecken von S (vertices). Jede Teilmenge $\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_l}\}$ von V definiert auch ein Simplex : $Konv(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_l})$. Die Simplices dieser Form heissen "faces" (englisch) von S. Nicht vergessen : $\emptyset \in V$ wird auch als face von S betrachtet.*

Definition 13. *Sei K eine Familie von Simplices in $\mathbb{R}^n$. K heisst geometrischer Simplizialkomplex, wenn :*

i) Für jeden S in K, jeder face S' von S ist auch in K
ii) Für alle S_1 und S_2 in K ist $S_1 \cap S_2$ eine face von S_1 und auch von S_2

Beispiele 14. *Betrachte die folgenden Mengen von Simplices in $\mathbb{R}^2$:*

Definition 15. *Sei K ein geometrischer Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{T}$ die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Jeder A in K hat eine "natürliche" Topologie : die von $\mathcal{T}$ induzierte Topologie. Die "übliche" Topologie auf $\cup_{A \in K} A$ (das ist kein offizieller Name, ich glaube, es gibt sowieso keinen, man sagt nur"die schwache Topologie") ist die schwache Topologie bzg. der $\{A\}_{A \in K}$. Man notiert diesen topologischen Raum : $\mid K \mid$.*

Bemerkung 16. *Wir sind hier im Fall der Proposition 10 : die $\{A_i\}_{i \in I}$ sind die Simplices S in K. Das heisst, die Topologie von $\mid K \mid$ ist mit den $\{S\}_{S \in K}$ koherent (wobei die Topologie auf jeden S die von $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie ist).*

Beweis : ÜA.

Bemerkung 17. *Vorsicht ! : Im Allgemeinen übereinstimmen die schwache Topologie $\mathcal{T}$ und die von $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie auf $\{A\}_{A \in K}$ NICHT.*

Gegenbeispiel 18. *In $\mathbb{R}^2$. Sei, für jeden $n \geq 1$, A_n das Segment von $(0,0)$ nach $(1, \frac{1}{n})$. Sei $K := \{A_n\}_{n \geq 1}$. Sei, für jeden $n \geq 1$, x_n der Punkt auf A_n mit Abstand $\frac{1}{n}$ von $(0,0)$. $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $(0,0)$ bezüglich der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie aber nicht bezüglich der schwachen Topologie.*

Beweis : ÜA.

Bemerkung 19. *Diese schwache Topologie ist im Allgemeinen nicht metrizierbar : das ist der Fall im letzen Gegenbeispiel. ÜA.*

Definition 20. *Sei I eine beliebige Menge (nicht notwendig endlich). $\mathbb{R}^{(I)}$ bezeichnet den reellen Vektorraum mit Basis I. Das heisst : $\mathbb{R}^{(I)}$ ist der Teilraum von $\mathbb{R}^I := \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I, x_i \in \mathbb{R}\}$ dadurch definiert :*

$$\mathbb{R}^{(I)} := \{ \ (x_i)_{i\in I} \ \in \ \mathbb{R}^I \ \mid \ \textit{die } x_i \textit{ sind fast alle null} \ \}$$

Wir notieren, für jeden $j \in I$, $e_j := (x_i)_{i\in I}$, wobei $x_i = 0$ für alle $i \in I \setminus \{i\}$, und $x_j = 1$. Also : $(e_i)_{i\in I}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^{(I)}$. $\mathbb{R}^{(I)}$ hat einen natürlichen "scalar product" :

$$\langle (x_i)_i, (y_i)_i \rangle := \ \Sigma_i x_i y_i$$

Man kann genau das Gleiche, wie in Definition 13, machen, mit $\mathbb{R}^{(I)}$ statt $\mathbb{R}^n$. Der Vorteil ist, dass man dann geometrische Simplizialkomplexe konstruiren kann, ohne auf die Dimension aufpassen zu müssen : es gibt dann immer "genug Platz", um Simplices hinzuzufügen (diese Idee wird später klar bekommen, wann man die Realisierung eines abstakten Simplizialcomplexes konstruiren wollen wird).

Definition 21. *Wir nennen abstrakter Simplizialkomplex, jeden Simplizialkomplex im Sinn der Vorlesung.*

Erinnerung : Sei ν eine Menge. Ein abstrakter Simplizialkomplex Δ mit Eckenmenge ν ist : eine Teilmenge Δ von $\mathcal{P}(\nu)$, so dass jedes Element von Δ eine endliche Teilmenge von ν ist, jede einelementige Teilmenge $\{v\}$ von ν in Δ ist, und :

$$b \ \subset \ a \ \in \ \Delta \ \Rightarrow \ b \ \in \ \Delta$$

Konstruktion 22. *Sei Δ ein abstrakter Simplizialkomplex, mit Eckenmenge ν. Wir sind jetzt in $\mathbb{R}^{(\nu)}$, und identifizieren die Elemente v von ν mit den Vectoren e_v, d.h. :*

$$\mathbb{R}^{(\nu)} \ = \ \{ \ \Sigma_{v\in\nu} x_v v \ \mid \ \textit{jeder } x_v \ \in \ \mathbb{R}, \ \textit{die } x_v \textit{ sind fast alle null} \ \}$$

Wir betrachten die Menge :

$$K := \{Konv(a) \mid a \in \Delta\}$$

Beispiel und Definition 23. *Sei $a := \{v_0, v_1, ..., v_n\} \subset \nu$. ν ist eine Basis von $\mathbb{R}^{(\nu)}$, von deren $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ $n + 1$ linear unhabhängige Vektore sind.*

$$Konv(a) \ := \ \{ \ x \ = \ \Sigma_{i=0}^{n} x_i v_i \ \mid \ \forall \ i \ , \ x_i \geq 0 \ und \ \Sigma x_i = 1\}$$

Jedes $Konv(a)$ hat eine natürliche Topologie : die von $\mathbb{R}^{(\nu)}$ induzierte Topologie. Wir nennen den entsprechenden Topologischen Raum : $\mid a \mid$.

ÜA : Prüft, dass der K vom Konstruktion 22. ein geometrischer Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^{(\nu)}$ ist.

Definition 24. *Der topologische Raum* $\mid K \mid$ *(also mit der schwachen Topologie bzg. der* $\mid a \mid$ *) heisst die geometrische Realiesierung des abstraktes Simplizialkomplexes* Δ.

ÜA : Schreibt die Übersetzung dieser Definition zu der Definition der Vorlesung. Hinweis : die Funktionen "ψ" der Vorlesung entsprechen den baryzentrischen Koordinaten der Punkte "x" dieser Unterlage.

Ja... Und ?

Warum is das interessant ? Erstens : dieser Topologische Raum ist komplet in dem kombinatorischen Datum Δ enkodiert. Im Besonderen : die so definierte Topologie ist tatsächlich unabhängig vom Raum $\mathbb{R}^{(\nu)}$. Die ist "intrinsèque" (ein bisschen wie für den Fall einer manigfaltigkeit zum Beispiel). Zweitens : diese Topologie erlaubt uns, sehr einfach die Stetigkeit einer Funktion von so einem Raum nach einem anderen zu prüfen (oder umgekehrt). Genauer :

Proposition 25. *Sei* X *ein Topologischer Raum,* $\{A_i\}_{i\in I}$ *eine Familie von Unterräumen mit* $X = \cup\{i \in IA_i$ *so, dass die Topologie auf* X *koherent mit den* $\{A_i\}_{i\in I}$ *ist. Sei* Y *ein topologischer Raum und* $f : X \longrightarrow Y$ *eine Abbildung.* f *ist stetig genau dann, wenn : für jeden* $i \in I$, $f_{|A_i} : A_i \longrightarrow Y$ *stetig ist.*

Der wichtigste Fall dieser Proposition für die Vorlesung ist : wenn $X =\mid K \mid$ ein geometrischer Simplizialkomplex ist (d.h. : die $\{A_i\}_{i\in I}$ sind die Simplices $S \in K$).

Eine sehr praktische Anwendung ist die folgende :

Definition 26. *Seien* Δ_1 *und* Δ_2 *zwei abstrakte Simplizialkomplexe,*

und $\varphi : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ *eine simpliziale Abbildung. Die geometrische Realisierung von* φ *ist :*

$$| \varphi | : | \Delta_1 | \longrightarrow | \Delta_2 |$$

so, dass für jeden a in Δ_1 *:*

$$\begin{array}{rcl} | \varphi |_{||a|} : | a | & \longrightarrow & | \varphi(a) | \\ \Sigma_{v \in a} x_v v & \longmapsto & \Sigma_{v \in a} x_v \varphi(v) \end{array}$$

ÜA : prüft dass, solche Funktionen $| \varphi |$ stetig sind.

ÜA : Prüft, dass man ähnliche Funktionen von einem geometrischen Simplicialkomplex nach einem anderen geometrischen Simplizialkomplex direkt definieren kann. In welchen Fällen ist so eine Funktion stetig ?

ÜA : Sei Δ der abstrakte Simplizialkomplex mit Eckenmenge $\nu := \{v_0, v_1, ..., v_n, ...\}$ dadurch definiert :

$\Delta := \{\{v\}\}_{v \in \nu} \cup \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, ..., \{v_0, v_n\}, ...\}$. Sei K' der geometrische Simplizialkomplex des Gegenbeispieles 18. Sei ν' die Eckenmenge von K'. Sei φ die Abbildung von $| K |$ nach $| K' |$ so dass : $\varphi(v_0) = (0, 0)$ und für jedes $n \geq 1$: $\varphi(v_n) = (1, \frac{1}{n})$, und weiter : $\varphi((1 - t)v_0 + tv_n) = (1 - t)(0, 0) + t(1, \frac{1}{n})$. Prüft, dass φ ein Homöomorphismus ist. Betrachte die Folge in $| K' |$: $(y_n)_n$ so dass, y_n der Punkt von A_n mit erster Koordinat $\frac{1}{2}$ ist. Die konvergiert in $\mathbb{R}^2$ gegen $(\frac{1}{2}, 0)$, aber nicht in $| K' |$, was vielleicht noch nicht klar war. Was ist ihr Urbild durch φ ? Es ist jetzt klar, dass diese Folge in $| K |$ konvergiert nicht (prüft es trotzdem !). Und deshalb konvergierte die Folge $(y_n)_n$ in $| K' |$ auch nicht.

ÜA : Macht die Übung 1 des Blattes 2 mit diesem Standpunkt.